المحور الأول: التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

التوزيعات الاحتمالية المتقطعة تصف توزيع الاحتمالات لقيم متغير عشوائي يمكن أن يأخذ قيمًا منفصلة ومعينة. في هذه الفصل، سنتناول مفاهيم أساسية حول التوزيعات الاحتمالية المتقطعة وأمثلة على استخداماتها.

يوجد عدة قوانين التوزيع الاحتمالي في حالة متغير عشوائي متقطع نذكر منها:

1-1- توزيع برنولي: Bernoulli Distribution

نقول عن تجربة أنها " برنولية" إذا كانت تحتمل نتيجتين (حدثين) متنافيتين A و $\bar{A}$. نسمي A نجاح و $\bar{A}$ فشل. نعتبر المتغيرة ع X التي تمثل **عدد مرات النجاح**، تأخذ X القيمة 1 عند تحقق الحدث A و 0 في الحالة المعاكسة. نرمز عادة بـ p " احتمال النجاح" لاحتمال تحقق الحدث A و q = 1-p احتمال الحدث المعاكس (الفشل). يوصف هذا التوزيع بالشكل التالي:

$$\mathbf{P(x_i,p)}=\begin{cases} \boldsymbol{p} & \boldsymbol{,x=1} \\ \boldsymbol{1-p} & \boldsymbol{,x=0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{otherwise} \end{cases}$$

ونكتب: $\mathbf{x \sim B(1,p)}$

يستعمل قانون برنولي عندما نقوم بالتجربة مرة واحدة (n=1).

إن التوقع الرياضي (المتوسط) (μ)والتباين (σ^2) و الانحراف المعياري (σ) لتوزيع برنولي هي:

$$\begin{cases} \mu = p \\ \sigma^2 = pq \\ \sigma = \sqrt{pq} \end{cases}$$

حيث:

$$E(X) = \mu = \sum_{x=0}^{1} xi.P(X=xi) = O.P(X=0) + 1.P(X=1) = p$$

$$E(X) = \mu = p$$

$$v(x) = \sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

حيث:

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{1} xi^2.P(X=xi) = 0^2.P(X=O) + 1^2.P(X=1) = p$$

ومنه:

$$v(X) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

اذا:

$$v(X) = \sigma^2 = pq$$

أمثلة:

- نرمي قطعة نقود، نسمي ظهور الوجه نجاح (1)، احتمال النجاح p=0.5

التوقع الرياضي: $\mu = p = 0.5$، التباين: $\sigma^2 = pq = 0.5 * 0.5 = 0.25$

- نرمي حجر نرد، نسمي ظهور رقم أكبر أو يساوي 5 نجاح (1)، احتمال النجاح p=2/6

التوقع الرياضي: $\mu = p = 2/6$، التباين: $\sigma^2 = pq = 2/6 * 4/6 = 8/36$

2-1- التوزيع ثنائي الحدين The Binomial Distribution

نطبق قانون توزيع الثنائي عندما نكرر تجربة برنولي n مرة، حيث أن n عدد صحيح موجب مع ثبات قيمة p (التي تعتبر احتمال النجاح) مهما أعيدت التجربة أي أن الحوادث تكون مستقلة (شرط من شروط برنولي).

وعليه فإن المتغير العشوائي (X) الذي يمثل عدد مرات (النجاح) لهذا النوع من التجارب، يقال بأنه موزع وفق توزيع بينوميال، إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل التالي:

$$p(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} & , x = 0,1,2, \dots n \\ 0 & \boldsymbol{otherwise} \end{cases}$$

n: تمثل عدد مرات انجاز التجربة حيث (n=1→30)

x: تمثل قيمة من قيم المتغير العشوائي و أعظم قيمة لها هي n

p: تمثل احتمال حادث النجاح

q: تمثل احتمال حادث الفشل (1-P)

ويرمز عادة لتوزيع بينوميال بالرمز: **x~B(n,p)**

التوقع الرياضي (المتوسط) والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع ذي الحدين يعطى بالعلاقات التالية:

$$E(X) = \mu_x = np$$

البرهان:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum xi . P(X = xi) \\ &= \sum x . C_n^x P^x (1-P)^{n-x} \\ &= \sum x \frac{n!}{x! (n-x)!} P^x (1-p)^{n-x} \\ &= \sum x \frac{n (n-1)!}{x (x-1)! (n-x)!} P^{x-1} P (1-p)^{n-x} \end{aligned}$$

$$= nP \sum \frac{(n-1)!}{(x-1)! (n-x)!} P^{x-1} (1-P)^{n-x} = nP \sum C_{n-1}^{x-1} P^{x-1} (1-P)^{n-x} = nP \, 1$$

$$= nP = E(x)$$

بينما يعطى التوقع لمربع المتغير العشوائي x الذي يتبع توزيع ذي الحدين بالعلاقة التالية:

$$E(X^2) = n^2 p^2 + npq$$

وبالتالي يكون التباين V(X) والانحراف المعياري σ_x للمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع ذي الحدين كالتالي:

$$V(X) = \sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = (n^2 p^2 + npq) - n^2 p^2 = npq$$

$$\sigma_x = \sqrt{npq}$$

برهان:

$$V(X) = E(x^2) - E(X)^2$$
$$= \sum x^2\, P(X = x) - (np)^2$$
$$= \sum x^2\, C_n^x\, P^x\,(1-P)^{n-x} - n^2P^2$$
$$= \sum x^2\, \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, P^x\,(1-P)^{n-x} - n^2P^2 = \sum (x(x-1)$$
$$+ x)\, \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, P^x\,(1-P)^{n-x} - n^2P^2$$
$$= \sum \big(x(x-1)\big)\, \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, P^x\,(1-P)^{n-x}$$
$$+ \sum x\, \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, P^x\,(1-P)^{n-x} - n^2P^2$$
$$= \sum \big(x(x-1)\big)\, \frac{n!}{x!\,(n-x)!}\, P^x\,(1-P)^{n-x} + nP - n^2P^2 =$$
$$= \sum \big(x(x-1)\big)\, \frac{n!}{x(x-1)(x-2)!\,(n-x)!}\, P^{x-2}P^2\,(1-P)^{n-x} + nP - n^2P^2$$
$$= P^2 \sum \frac{n(n-1)(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!}\, P^{x-2}\,(1-P)^{n-x} + nP - n^2P^2$$
$$= P^2n(n-1) \sum \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!}\, P^{x-2}\,(1-P)^{n-x} + nP - n^2P^2$$
$$= P^2n(n-1) \sum C_{n-2}^{x-2}\, P^{x-2}\,(1-P)^{n-x} + nP - n^2P^2$$

$$= P^2n(n-1)1 + nP - n^2P^2 = P^2n^2 - nP^2 + nP - n^2P^2 = -np^2 + np$$
$$= np(1-p) = npq = V(X)$$

ملاحظة 1: في بعض قد يصعب علينا حساب احتمال المتغير العشوائي X من اجل قيمة معينة، و لذلك تم تقديم جداول احصائية تؤدي هذا الغرض من اجل قيم مختلفة لـ n, x, p.

ملاحظة2: نستعمل توزيع ثنائي الحدين (أو الثنائي) لما تكون $n \leq 30$.

ملاحظة 3: حتى يكون التوزيع ثنائي الحدين توزيعا احتماليا يجب أن يكون مجموع احتمالاته تساوي 1 أي

$$\sum_{x=0}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{X} = \mathrm{x}) = 1 \Rightarrow \sum_{\mathrm{x}=0}^{\mathrm{n}} \mathrm{C}_{\mathrm{n}}^{\mathrm{x}}\ \mathrm{p}^{\mathrm{x}}\ \mathrm{q}^{\mathrm{n-x}} = 1$$

مثال 1: في تجربة القاء قطعة نقد غير متوازنة. ما هو احتمال الحصول على الوجه (F) 8 مرات عند 20 رمية، اذا علم أن P(F)=0,4 , P(P)=0,6.

الحل: q=0,6 , p=0,4 , x=8 , n=20

حسب المعطيات: $X \sim B(20,\ 0{,}4)$

بتطبيق قانون توزيع الثنائي:

$$P(X = 8) = C_{n=20}^{x=8}\ P^8\ q^{20-8} = C_{20}^{8}\ 0{,}4^8\ 0{,}6^{12} = 0{,}1797$$

مثال2: في تجربة القاء حجري نرد 30 مرة، اوجد احتمال الحصول على المجموع 9، 10 مرات.

الحل:

بالاستعمال التجربة نجد x=10, n=30

حادث النجاح هو الحصول على المجموع 9 حيث أن احتمال النجاح في هذه الحالة هوp=4/36

و بالتالي احتمال الفشل هو q=1-P=1-4/36= 32/36

و منه $X\sim B(30,\ 4/36)$

بتطبيق قانون توزيع الثنائي:

$$P(X=10)=C_{30}^{10}\,p^{10}\,q^{30-10}=C_{30}^{10}\,(\frac{4}{36})^{10}\,(\frac{32}{36})^{20}=0{,}004$$

مثال 3: إذا كان 20% من انتاج المصنع هو انتاج تالف، أخذت عينة من 4 وحدات، أوجد الاحتمالات التالية:

1. الوحدات المختارة تالفة.
2. على الأكثر توجد وحدتين تالفتين.
3. 3 من الوحدات المختارة جيدة.
4. التوقع والانحراف المعياري لعدد الوحدات التالفة.
5. التوقع والانحراف المعياري لعدد الوحدات الجيدة.

الحل:

1. **احتمال أن الوحدات المختارة تالفة:**

نفرض أن نسبة الإنتاج التالف p حيث: p=0.20 بينما نسبة الإنتاج الجيد هي q حيث: q=0.80 والمتغير العشوائي X يرمز إلى عدد الوحدات التالفة.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=4)=C_4^4\mathrm{P}^4(q)^{4-4}=1*0.2^4*0.8^{4-4}=0.0016$$

2. **احتمال على الأكثر توجد وحدتين تالفتين:**

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 2)&=\mathrm{p}(\mathrm{X}=0)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)+\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)\\&=C_0^4P^0(q)^{4-0}+C_1^4P^1(q)^{4-1}+C_2^4P^2(q)^{4-2}\\&=C_0^4 0.2^0(0.8)^{4-0}+C_0^4 0.2^0(0.8)^{4-0}+C_0^4 0.2^0(0.8)^{4-0}=\end{aligned}$$
$$0.9728$$

3. **3 من الوحدات المختارة جيدة:**

نفرض أن نسبة الإنتاج الجيد p حيث p=0.80 بينما نسبة الإنتاج التالف هي q حيث q=0.2 والمتغير العشوائي X يرمز إلى عدد الوحدات الجيدة.

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=C_3^4\mathrm{P}^3(q)^{4-3}=C_3^4(0.8)^3(0.2)^{4-3}=0.4096$$

4. **التوقع والانحراف المعياري لعدد الوحدات الجيدة.**

نفرض أن نسبة الإنتاج التالف p حيث: p=0.20 بينما نسبة الإنتاج الجيد هي q حيث: q=0.80

$$E(X) = np = 4 * 0.2 = 0.8$$
$$\sigma_x = \sqrt{npq} = \sqrt{4 * (0.2)(0.8)} = 0.8$$

5. التوقع والانحراف المعياري لعدد الوحدات الجيدة.

نفرض أن نسبة الإنتاج الجيد p حيث p=0.80 بينما نسبة الإنتاج التالف هي q حيث q=0.2

$$E(X) = np = 4 * 0.8 = 3.2$$
$$\sigma_x = \sqrt{npq} = \sqrt{4 * (0.8)(0.2)} = 0.8$$

1-3- توزيع بواسون: **Poisson distribution**

هو توزيع لمتغير كمي منفصل يمثل عدد مرات حدوث حدث عشوائي في فترة زمنية محددة أو مكان محدد، وكذلك في حالة الأحداث نادرة الوقوع، مثل عدد حوادث المرور على طريق معين، عدد الزبائن الذين يترددون على محل ما خلال فترة زمنية، عدد المكالمات الهاتفية التي يتلقاها موزع هاتفي خلال فترة زمنية، عدد الوحدات الفاسدة في حصة انتاجية معينة.

إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات حدوث حدث ما خلال فترة زمنية محددة أو مساحة مكانية محددة فإن المتغير X يكون له توزيع بواسون بمتوسط λ وتكون دالة كثافته الاحتمالية على الشكل التالي:

$$f(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \ ; x = 0,1,2, ...$$

حيث e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي، وقيمتها هي $e= 2.718$ تقريبا.

λ : هي معلمة توزيع بواسون، وهي عبارة عن معدل الحدوث في الفترة الزمنية أو في المساحة المعينة.

حيث: $\lambda = n.p$

ويرمز عادة لتوزيع بواسون بالرمز: $x \sim P(\lambda)$

التوقع الرياضي (المتوسط) والتباين والانحراف المعياري للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع بواسون يعطى بالعلاقات التالية:

$$E(X) = \mu = \lambda$$

برهان:

$$E(X) = \sum x\, P(X = x) = \sum x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
$$= \sum x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x(x-1)!} = e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda\, \lambda^{x-1}}{(x-1)!} =$$

لدينا $e^{\lambda} = \sum \frac{\lambda^{k}}{k!}$ نقوم بتعويضه في القانون

$$E(X) = e^{-\lambda}\, \lambda\, e^{\lambda} = \lambda$$

بينما التوقع لمربع المتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع بواسون يعطى بالعلاقة:

$$E(X^2) = \lambda^2 + \lambda$$

وبالتالي فإن التباين للمتغير العشوائي X الذي يتبع توزيع بواسون يكون:

$$V(X) = \sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2 = (\lambda^2 + \lambda) - \lambda^2 = \lambda$$

برهان:

$$V(X) = \sum x^2\, P(X = x) - E(X)^2$$

$$= \sum x^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} - \lambda^2 = \sum (x(x-1) + x) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} - \lambda^2$$

$$= \sum (x(x-1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + \sum x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} - \lambda^2$$

$$= \sum (x(x-1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x(x-1)(x-2)!} + \lambda - \lambda^2$$

$$= e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^x}{(x-2)!} + \lambda - \lambda^2 =$$

$$= e^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^2 \lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda - \lambda^2 = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda} + \lambda - \lambda^2$$

$$V(X) = \lambda$$

والانحراف المعياري يعطى بالعلاقة التالية:

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

ملاحظات:

- عدد التجارب التي تقوم بها يكون كبير جدا أي $(n > 30)$،
- احتمال النجاح (p) يكون جد صغير حيث $(np < 5)$.
- لكي يكون قانون بواسون توزيعا احتماليا يجب أن يكون:

$$\sum P(X = xi) = \sum \frac{\lambda^x\, e^{-\lambda}}{x!} = 1$$

- نستطيع استعمال جدول قانون بواسون لتسهيل عملية الحساب مع استعمال العوامل التالية:،λ، x

مثال1:

يتلقى موزع هاتفي لإحدى الادارات العمومية خلال فترة زمنية تقدر بـ 14 د عدد من من المكالمات بمعدل3.

المطلوب: حساب احتمال:

1- عدم تلقي أي مكالمة
2- تلقي مكالمة واحدة
3- تلقي مكالمتين
4- تلقي على الاقل مكالمتين

الحل: $\lambda = 3$

1- احتمال عدم تلقي أي مكالمة:

$$P(X=0) = \frac{\lambda^x\, e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^0\, e^{-3}}{0!} = \frac{1}{e^3} = 0{,}04978$$

2- احتمال تلقي مكالمة واحدة:

$$P(X=1) = \frac{\lambda^x\, e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^2\, e^{-3}}{1!} = \frac{3}{e^3} = 0{,}14536$$

3- احتمال تلقي مكالمتين:

$$P(X=2) = \frac{\lambda^x\, e^{-\lambda}}{x!} = \frac{3^2\, e^{-3}}{2!} = 0{,}22404$$

4- احتمال تلقي مكالمتين على الاقل:

$P(X\geq 2)= P(X=2)+P(X=3)+ \ldots\ldots\ldots +P(X=n)= 1-P(X<2)$

$=1-[P(X=0)+P(X=1)]= 1-(0{,}04978+0{,}14536)=0{,}801$

مثال 2: إذا كان معدل وقوع الزلازل في احدى الدول هو زلزالين في السنة، أحسب:

1. احتمال وقوع 3 زلازل في أحد السنين؛
2. احتمال وقوع 5 زلازل خلال سنتين؛
3. المتوسط والتباين في الحالة 2.

الحل:

1. احتمال وقوع 3 زلازل في أحد السنين:

$$\lambda = 2$$

$$P(X=3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-2}2^3}{3!} = 0.180$$

2. احتمال وقوع 5 زلازل خلال سنتين:

نلاحظ أن قيمة المتوسط (λ) تغيرت كالتالي:

1سنة ← زلزالين

2 سنة ← ؟

$$\lambda = \frac{2*2}{1} = 4$$

$$P(X=5) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-4}4^5}{5!} = 0.156$$

3. المتوسط والتباين في الحالة 2.

$$E(X) = \mu = \sigma^2 = \lambda = 4$$

4-1- توزيع فوق الهندسي: Hypergeometric Distribution

أذا كان لدينا مجتمع يحتوي على (N) من العناصر، فيه (N_1) لنوع معين من العناصر نسميها (نجاحا)، أما المتبقي منه هو ($N-N_1$) لنوع آخر من العناصر نسميها (فشلا)، وتم اختيار عينة عشوائية بحجم (n) منه بدون ارجاع، فان عدد حالات النجاح التي يمكن الحصول عليها هي (N_1)، وأن عدد حالات الفشل هي ($N-N_1$) وعليه فإن:

عدد طرق اختيار (x) من (N_1) هو $C_x^{N_1}$

وعدد طرق اختيار (n-x) من ($N-N_1$) هو $C_{N-N_1}^{n-x}$

وبالتالي فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار (x) و (n-x) من (N_1) و ($N-N_1$) على الترتيب هو:

$$C_x^{N_1} C_{N-N_1}^{n-x}$$

وعدد الطرق الكلية لاختيار (n) من (N) هو C_N^n

وبافتراض لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن (X) يمثل عدد النجاح التي يمكن الحصول عليها من تجربة من تجربة التوزيع فوق الهندسي، ففي هذه الحالة يقال بأن المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع فوق الهندسي إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي له، تأخذ الشكل التالي:

$$P(X=x)=\begin{cases}\dfrac{C_x^{N_1}\, C_{N-N_1}^{n-x}}{C_N^n}, & x=0,2,3,\dots.n\\ 0, & \boldsymbol{otherwise}\end{cases}$$

وغالبا ما يعبر عن التوزيع فوق الهندسي، اختصارا بالرمز التالي:

$$X\sim H(N_1, N-N_1)$$

إن التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري للتوزيع فوق الهندسي، تكتب على النحو التالي:

$$E(X)=n.\frac{N_1}{N}$$

$$V(X)=\frac{n\,.N_1}{N}(1-\frac{N_1}{N})(\frac{N-n}{N-1})$$

$$\sigma_x=\sqrt{V(X)}$$

إذ أن: $\frac{N-n}{N-1}$: يمثل معامل التصحيح (خاص بالمجتمعات المحدودة).

مثال1: وعاء به 10 كرات منها 6 بيضاء والبقية سوداء. نسحب مجموعة من 5 كرات. المتغير العشوائي X هو عبارة عن عدد كرات المسحوبة تكون بيضاء. ما هو احتمال أن تكون كريتيين مسحوبتين بيضاء من بين 5 المسحوبة؟

نحن امام قانون فوق الهندسي حيث: $X\sim H(6,4)$

$$P(X=2)=\frac{C_6^x\ C_{10-6}^{5-x}}{C_{10}^5}=\frac{C_6^2\ C_4^{5-2}}{C_{10}^5}=0{,}24$$

مثال2: قسم يحتوي على 50 طالب، 20 منهم أجانب. ما هو احتمال سحب مجموعة من 15 طالب حيث يكون 5 منهم اجانب.

نعرف X المتغير العشوائي الذي يعطينا عدد الاجانب من مجموعة 15 طالب مختارين.

نحن امام قانون فوق الهندسي حيث: $X\sim H(20{,}30)$

$$P(X=5)=\frac{C_{20}^x\ C_{50-20}^{15-x}}{C_{50}^{15}}=\frac{C_{20}^5\ C_4^{15-5}}{C_{50}^{15}}=\ 1{,}106\ e^{-18}$$

مثال : وعاء به 10 كرات منها 6 بيضاء و البقية سوداء. نسحب مجموعة من 5 كرات. المتغير العشوائي X هو عبارة عن عدد كرات المسحوبة تكون بيضاء. أحسب $E(X)$ و $V(X)$

$$X\sim H(6{,}4)$$

$$E(X)=n.\frac{k}{N}=5\ \frac{6}{10}=3$$

$$V(X)=\frac{n\ .N_1}{N}(1-\frac{N_1}{N})(\frac{N-n}{N-1})=\frac{5\ .6}{10}(1-\frac{6}{10})(\frac{10-5}{10-1})\ =$$